

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2018

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. (8 μον.)

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

(7 μον.)

A3. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ), αν είναι σωστή ή με Λάθος (Λ), αν είναι λανθασμένη. (10 μον.)

- i. Η παράγωγος της συνάντησης $f(x) = 3^{x^2}$ ισούται με $3^{x^2} \ln 3$.
- ii. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι πάντα παραγωγίσιμη στο x_0 .
- iii. Αν το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε αυτό ισούται με το $f'(x_0)$.
- iv. Έστω η συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .
- v. Τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ είναι μόνο τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της είναι ίση με 0.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

B1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f . (6 μον.)

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. (9 μον.)

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . (7 μον.)

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2, B3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (3 μον.)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f'(x) = -\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2}, \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 0.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. (4 μον.)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα, και τα σημεία καμπής. (8 μον.)

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = e^x$, $x > 0$ έχει δυο ακριβώς θετικές ρίζες. (9 μον.)

Γ4. Να αποδείξετε ότι $2f(4x) + f(x) > 3f(3x)$, για κάθε $x \geq e\sqrt{e}$. (4 μον.)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι :

- $e^{f(x)} + 3f(x) + 1 = x^3 + 4x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = 0$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{h} = 9$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(1) = 3$. (7 μον.)

Δ2. Να δείξετε ότι f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο \mathbb{R} και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . (6 μον.)

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$. (6 μον.)

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x^2} + 4x^2) > f(e^{-x+2} - 4x + 8)$. (6 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ